कक्षा X के लिए क्रियाकलाप

Geometry was always considered more as a discipline of the mind than any other part of mathematics, for it could boast closen relations to logic. Genuine deductivity was the privilege of geometry, whereas the business of algebra was substitution into and transforming formulae. On the other hand the pragmatic point of view would require only a few theorems and not the geometry prescribed by Euclidean tradition. Some people are prepared to teach more useless things in mathematics, but object to geometry being a weak system

– H. Freudenthal.

क्रियाकलाप 1

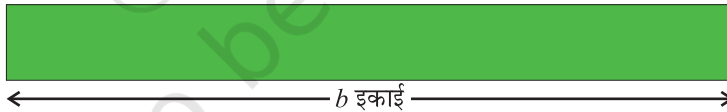
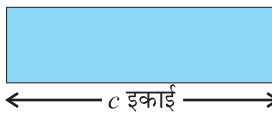
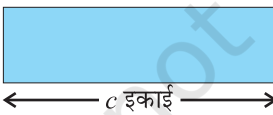
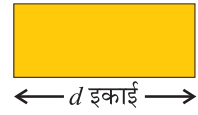
उद्देश्य

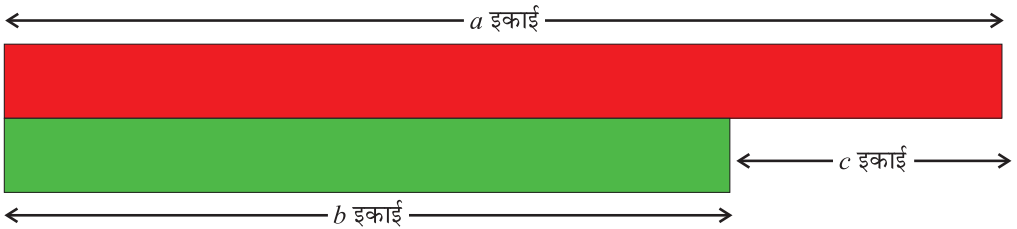
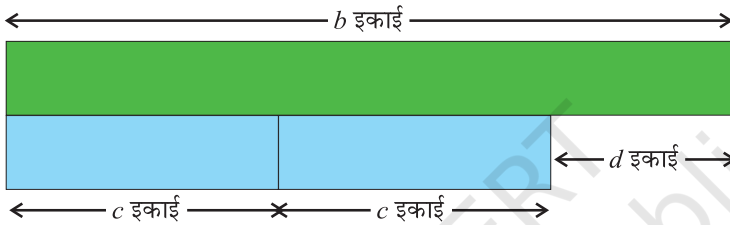
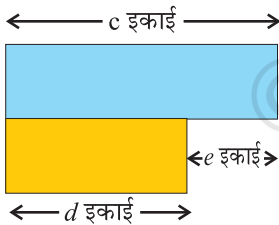
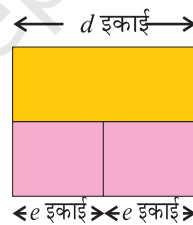
यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका के आधार पर प्रायोगिक रूप से दो संख्याओं का HCF ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड शीट, विभिन्न रंगों के चिकने (ग्लेज्ड) काग़ज़, कैंची, पटरी (रूलर), स्कैच पेन, गोंद, इत्यादि।

रचना की विधि

1. लंबाई a इकाई की एक पट्टी, लंबाई b इकाई $(b < a)$ की एक पट्टी, लंबाई c इकाई $(c < b)$ की दो पट्टियाँ, लंबाई d इकाई $(d < c)$ की एक पट्टी तथा लंबाई e इकाई $(e < d)$ की दो पट्टियाँ एक कार्ड बोर्ड शीट में से काट लीजिए।
2. इन पट्टियों को विभिन्न रंगों के चिकने काग़ज़ों से ढक लीजिए, जैसा कि आकृति 1 से आकृति 5 में दर्शाया गया है।

आकृति 1, आकृति 2, आकृति 3, आकृति 4, आकृति 5

3. इन पट्टियों को दूसरी कार्ड बोर्ड शीट पर आकृति 6 से आकृति 9 में दर्शाए अनुसार सटाकर रखिए।

आकृति 6

आकृति 7

आकृति 8

आकृति 9

प्रदर्शन

यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका के अनुसार,

आकृति 6 दर्शाती है : $a = b \times 1 + c \; (q = 1, r = c)$ (1)

आकृति 7 दर्शाती है : $b = c \times 2 + d \; (q = 2, r = d)$ (2)

आकृति 8 दर्शाती है : $c = d \times 1 + e \; (q = 1, r = e)$ (3)

और आकृति 9 दर्शाती है : $d = e \times 2 + 0 \; (q = 2, r = 0)$ (4)

यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथम में की गई कल्पना के अनुसार,

a और b का HCF = b और c का HCF

= c और d का HCF = d और e का HCF

उपरोक्त (4) से, d और e का HCF, e है।

अत:, a और b का HCF = e है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन (mm में) द्वारा–

a =......... , b = ... , c = ... , d = ... , e = ...

अत:, __________ और __________ का HCF = ...

अनुप्रयोग

ऊपर दर्शाई गई प्रक्रिया दो या अधिक संख्याओं का HCF ज्ञात करने में प्रयोग की जाती है। यह प्रक्रिया संख्याओं का HCF ज्ञात करने की **विभाजन विधि** कहलाती है।

14/04/18

क्रियाकलाप 2

उद्देश्य

किसी द्विघात बहुपद का आलेख खींचना तथा निम्नलिखित को प्रेक्षित करना–

(i) वक्र का आकार, जब x^2 का गुणांक धनात्मक हो।

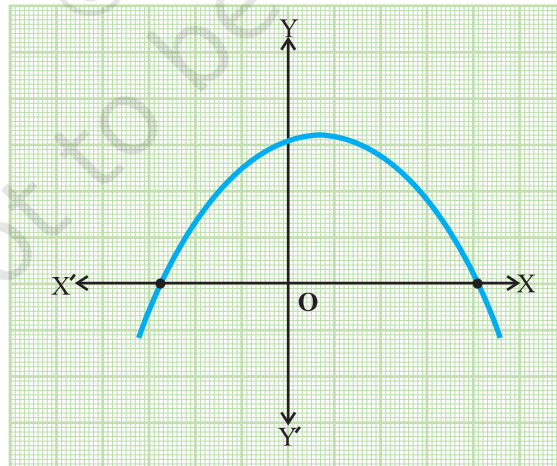
(ii) वक्र का आकार, जब x^2 का गुणांक ऋणात्मक हो।

(iii) उसके शून्यकों की संख्या।

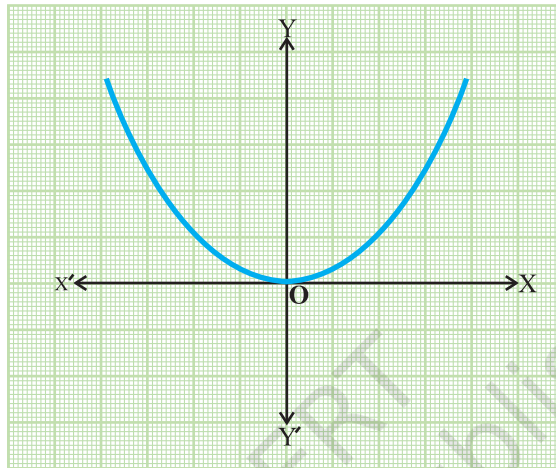
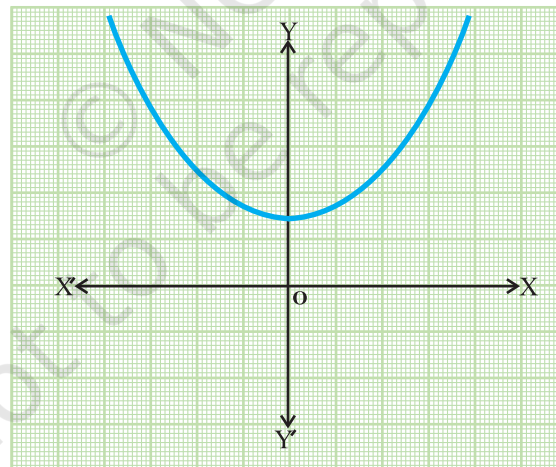
आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, आलेख कागज, पटरी, पेंसिल, रबड़, पेन, गोंद।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक आलेख कागज चिपकाइए।
2. एक द्विघात बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ लीजिए।
3. दो स्थितियाँ संभव हैं– (i) $a > 0$ (ii) $a < 0$
4. x के विभिन्न मानों के लिए, क्रमित युग्म $(x, f(x))$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 1

5. इन क्रमित युग्मों को कार्तीय तल में आलेखित कीजिए।

6. इन आलेखित बिंदुओं को मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाइए। (आकृति 1, आकृति 2 और आकृति 3)।

आकृति 2

आकृति 3

प्रदर्शन

1. प्रत्येक स्थिति में प्राप्त आकार एक परवलय है।

2. जब x^2 का गुणांक धनात्मक है, तब परवलय ऊपर की ओर खुलता है (देखिए आकृति 2 और आकृति 3)।

3. जब x^2 का गुणांक ऋणात्मक है, तब परवलय नीचे की ओर खुलता है (देखिए आकृति 1)।

4. शून्यकों की अधिकतम संख्या, जो एक द्विघात बहुपद में हो सकती है, 2 है।

प्रेक्षण

1. आकृति 1 में, परवलय _______ खुलता है।
2. आकृति 2 में, परवलय _______ खुलता है।
3. आकृति 1 में, परवलय x-अक्ष को _______ बिंदु(ओं) पर प्रतिच्छेद करता है।
4. दिए गए बहुपद के शून्यकों की संख्या _______ है।
5. आकृति 2 में, परवलय x-अक्ष को _______ बिंदु(ओं) पर प्रतिच्छेद करता है।
6. दिए हुए बहुपद के शून्यकों की संख्या _______ है।
7. आकृति 3 में, परवलय x-अक्ष को _______ बिंदु(ओं) पर प्रतिच्छेद करता है।
8. दिए हुए बहुपद के शून्यकों की संख्या _______ है।
9. शून्यकों की अधिकतम संख्या, जो एक द्विघात बहुपद में हो सकती है, _______ है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप निम्नलिखित में सहायता करता है–

1. एक द्विघात बहुपद के ज्यामितीय निरूपण को समझना।
2. एक द्विघात बहुपद के शून्यकों की संख्या ज्ञात करना।

टिप्पणी

आलेख कागज़ पर बिंदुओं को केवल मुक्त हस्त वक्र द्वारा ही मिलाना चाहिए।

क्रियाकलाप 3

उद्देश्य

आलेखीय विधि द्वारा दो चरों वाली रैखिक समीकरणों के एक युग्म के संगत / असंगत के होने प्रतिबंधों को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

आलेख काग़ज़, पेंसिल, रबड़, कार्ड बोर्ड, गोंद पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. दो चरों वाली समीकरणों के

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (2)$$

एक युग्म को लीजिए, जहाँ a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 और c_2 में से प्रत्येक एक वास्तविक संख्या हो; तथा a_1, b_1, a_2 और b_2 में सभी एक साथ शून्य न हों।

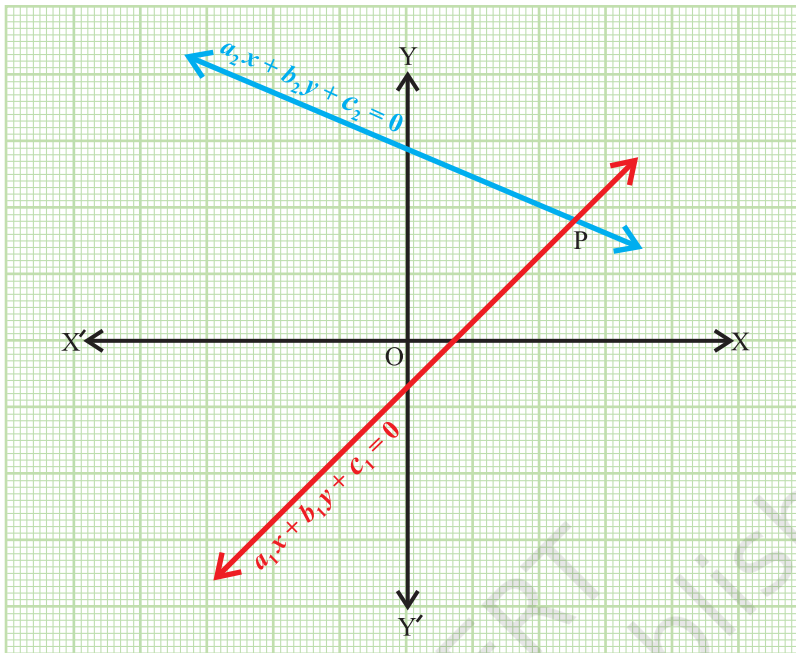
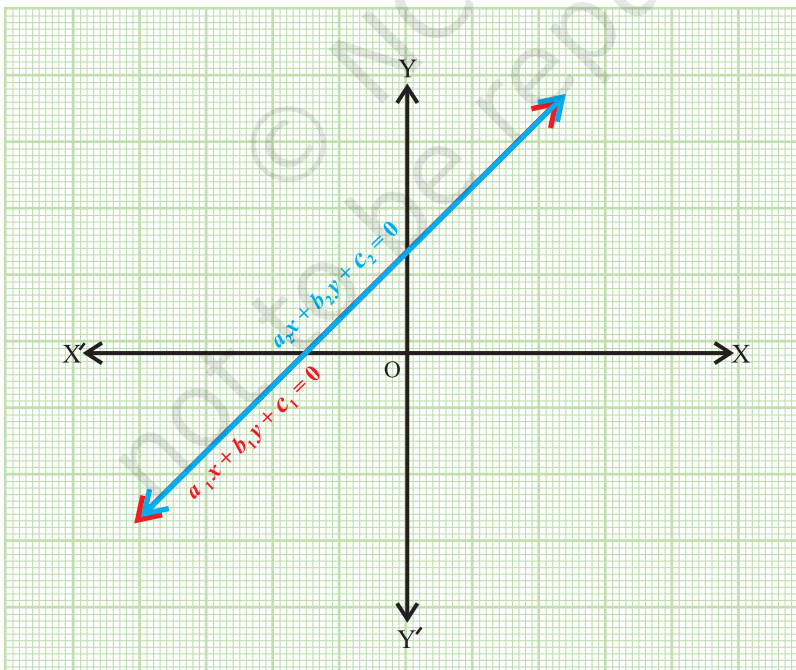
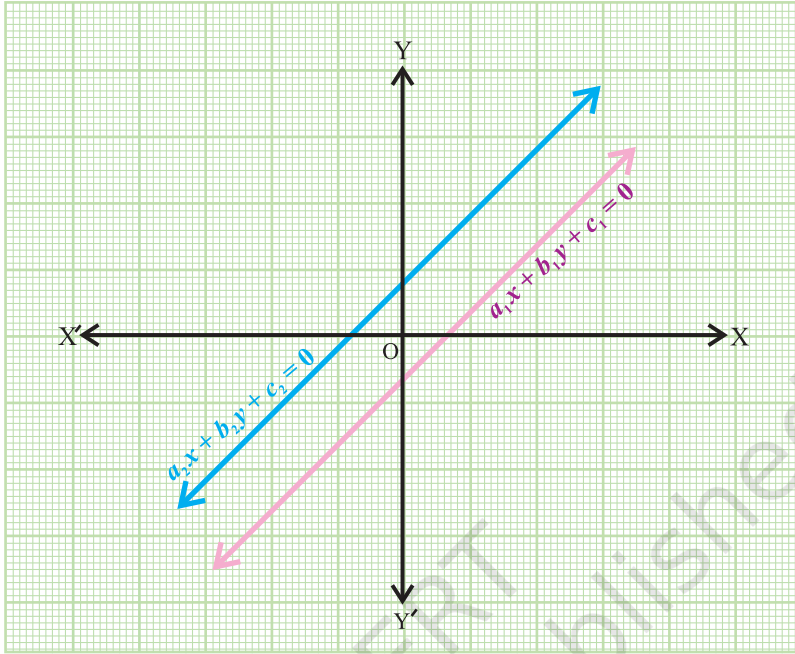
तीन स्थितियाँ संभव हैं–

स्थिति I – $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

स्थिति II– $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

स्थिति III– $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

2. उपरोक्त स्थितियों में से प्रत्येक के लिए, रैखिक समीकरण (1) और (2) को संतुष्ट करने वाले क्रमित युग्म प्राप्त कीजिए।

3. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक आलेख काग़ज़ चिपकाइए। इस आलेख काग़ज़ पर परस्पर दो लंब रेखाएँ X′OX और YOY′ खींचिए (देखिए आकृति 1)। चरण 2 में प्राप्त क्रमित युग्मों को, विभिन्न आलेख प्राप्त करने के लिए, विभिन्न कार्तीय तलों में आलेखित कीजिए (देखिए आकृति 1, आकृति 2 और आकृति 3)।

आकृति 1

आकृति 2

आकृति 3

प्रदर्शन

स्थिति I: हमें आकृति 1 में दर्शाए अनुसार आलेख प्राप्त होता है। दोनों रेखाएँ एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। बिंदु P(x,y) के निर्देशांक रैखिक समीकरणों (1) और (2) के युग्म का एक अद्वितीय हल प्रदान करते हैं।

अत:, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ वाले रैखिक समीकरणों का युग्म संगत होता है तथा इसका एक अद्वितीय हल होता है।

स्थिति II: हमें आकृति 2 में दर्शाए अनुसार आलेख प्राप्त होता है। यहाँ दोनों रेखाएँ संपाती हैं। इस प्रकार इस समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

अत:, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ वाले समीकरणों का युग्म भी संगत होता है तथा साथ ही आश्रित होता है।

स्थिति III: हमें आकृति 3 में दर्शाए अनुसार आलेख प्राप्त होता है। दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर हैं। समीकरणों के इस युग्म का कोई हल नहीं होता अर्थात् $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ वाली समीकरणों का युग्म असंगत होता है।

प्रेक्षण

1. a_1 = ____________, a_2 = ____________,

   b_1 = ____________, b_2 = ____________,

   c_1 = ____________, c_2 = ____________,

अतः, $\frac{a_1}{a_2}$ = ..., $\frac{b_1}{b_2}$ = ..., $\frac{c_1}{c_2}$ = ...

$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	स्थिति I, II या III	रेखाओं का प्रकार	हलों की संख्या	निष्कर्ष संगत/असंगत/ आश्रित

अनुप्रयोग

संगतता के प्रतिबंध इसकी जाँच करने में सहायता करते हैं कि रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल है या नहीं।

यदि हल या हलों का अस्तित्व है, तो इनसे यह ज्ञात करने में भी सहायता मिलती है कि हल अद्वितीय है या अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

क्रियाकलाप 4

उद्देश्य

एक द्विघात समीकरण ($x^2 + 4x = 60$) का पूर्ण वर्ग बनाकर ज्यामितीय रूप से हल ज्ञात करना।

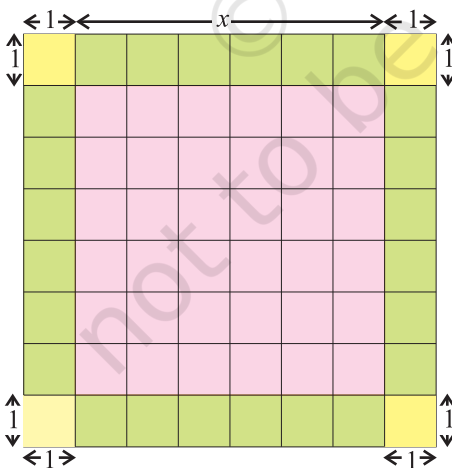
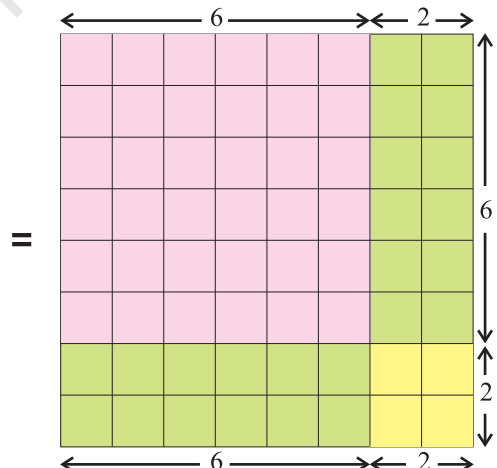
आवश्यक सामग्री

हार्ड बोर्ड, चिकना काग़ज़, गोंद, कैंची, मार्कर, सफ़ेद चार्ट पेपर, पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक हार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. गुलाबी चिकने काग़ज़ पर x इकाई की लंबाई वाली भुजा का एक वर्ग खींचिए और उसे हार्ड बोर्ड पर चिपकाइए (देखिए आकृति 1)। एक मार्कर की सहायता से इसे 36 इकाई (मात्रक) वर्गों में विभाजित कीजिए।
3. वर्ग की प्रत्येक भुजा के अनुदिश बाहर की ओर उसके साथ, विमाओं $x \times 1$, अर्थात् 6×1 वाले हरे चिकने काग़ज़ पर बना आयत चिपकाइए तथा प्रत्येक को मार्कर की सहायता से इकाई वर्गों में विभाजित कीजिए (देखिए आकृति 1)।
4. पीले चिकने काग़ज़ पर, भुजा 1 इकाई वाले चार वर्ग बनाइए और उन्हें काटकर निकाल लीजिए तथा प्रत्येक इकाई वर्ग को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार प्रत्येक कोने पर चिपकाइए।

आकृति 1 आकृति 2

14/04/18

5. विमाओं 8×8 वाला एक वर्ग बनाइए तथा उपरोक्त 64 इकाई वर्गों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

प्रदर्शन

1. प्रथम वर्ग कुल क्षेत्रफल $x^2 + 4x + 4$ निरूपित करता है।
2. दूसरा वर्ग कुल 64 (अथवा 60 + 4) इकाई वर्गों को निरूपित करता है।

   इस प्रकार, $x^2 + 4x + 4 = 64$

   या $(x + 2)^2 = (8)^2$ या $(x + 2) = \pm 8$

   अर्थात् $x = 6$ या $x = -10$

   क्योंकि x एक वर्ग की लंबाई निरूपित करता है, इसलिए इस स्थिति में, हम, $x = -10$ नहीं ले सकते, यद्यपि यह भी एक हल है।

प्रेक्षण

अनेक द्विघात समीकरण लीजिए तथा जैसा ऊपर बताया गया है वर्ग बनाइए, इन्हें हल कीजिए तथा हल प्राप्त कीजिए।

अनुप्रयोग

स्पेस (अंतरिक्ष) में किसी भी दिशा में प्रक्षेपित किए गए प्रक्षेपों के परवलय के आकार के पथों को समझने में द्विघात समीकरण सहायक रहती हैं।

क्रियाकलाप 5

उद्देश्य

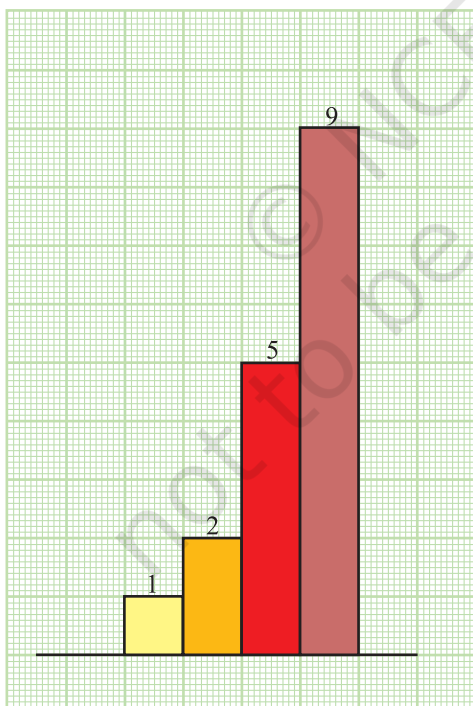
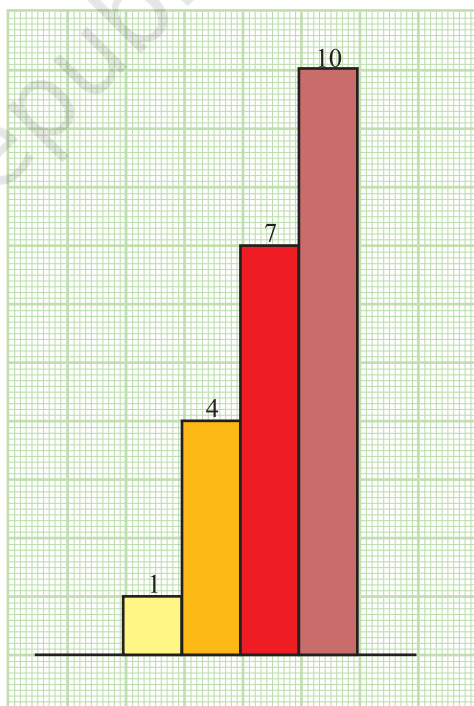
संख्याओं की कुछ दी हुई सूचियों (पैटर्नों) में से समांतर श्रेढ़ियों को पहचानना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, सफ़ेद काग़ज़, पेन, पेंसिल, कैंची, वर्गांकित कागज, गोंद, पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. उपयुक्त माप के दो वर्गांकित काग़ज़ लीजिए तथा उन्हें कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए।
3. मान लीजिए कि संख्याओं की सूचियाँ निम्नलिखित हैं–

   (i) 1, 2, 5, 9, ... (ii) 1, 4, 7, 10, ...

आकृति 1

आकृति 2

4. लंबाइयों 1, 2, 5, 9,.... इकाइयों वाली पट्टियाँ बनाइए और लंबाइयों 1, 4, 7, 10,.... इकाइयों वाली पट्टियाँ बनाइए तथा प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई एक इकाई रखिए।

5. लंबाइयों 1, 2, 5, 9,.... वाली पट्टियों को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार चिपकाइए तथा लंबाइयों 1, 4, 7, 10,.... वाली पट्टियों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार चिपकाइए।

प्रदर्शन

1. आकृति 1 में, दो क्रमागत पट्टियों की ऊँचाइयों (लंबाइयों) का अंतर एक (एकरूप) नहीं है। अत:, यह एक AP नहीं है।

2. आकृति 2 में, दो क्रमागत पट्टियों की ऊँचाइयों (लंबाइयों) का अंतर सदैव एक ही (एकरूप) है। अत:, यह एक AP है।

प्रेक्षण

आकृति 1 में, प्रथम दो पट्टियों की ऊँचाइयों का अंतर = __________ है।

दूसरी और तीसरी पट्टियों की ऊँचाइयों का अंतर = __________ है।

तीसरी और चौथी पट्टियों की ऊँचाइयों का अंतर = __________ है।
अंतर ____________________ है। (एकरूप / एकरूप नहीं)
अत:, संख्याओं 1, 2, 5, 9 की सूची से एक AP _____________ है। (बनती / नहीं बनती)

इसी प्रकार के प्रेक्षण आकृति 2 की पट्टियों के लिए लिखिए।
अंतर ____________________ है। (एकरूप / एकरूप नहीं)
अत:, संख्याओं 1, 4, 7, 10 की सूची से एक AP_____________ है। (बनती / नहीं बनती)

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप से समांतर श्रेढ़ी की अवधारणा को समझने में सहायता मिलती है।

टिप्पणी

ध्यान दीजिए कि यदि पट्टियों के ऊपरी सिरों के बाएँ कोनों को मिलाएँ, तो AP की स्थिति में वे एक सरल रेखा में होंगे।

क्रियाकलाप 6

उद्देश्य

प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना।

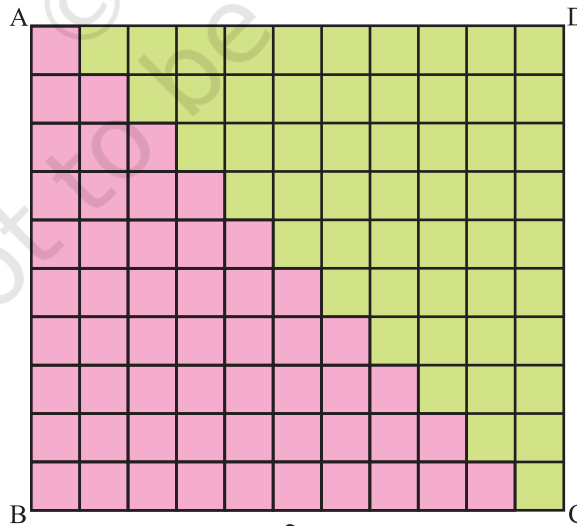
आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, रंगीन काग़ज़, सफ़ेद काग़ज़, कटर, गोंद, पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक आयताकार कार्ड बोर्ड लीजिए तथा उस पर एक रंगीन काग़ज़ चिपकाइए। इस पर, लंबाई 11 इकाई और चौड़ाई 10 इकाई का एक आयत ABCD खींचिए।
2. इस आयत को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार इकाई वर्गों में विभाजित कीजिए।
3. ऊपर सबसे बाईं ओर के कोने से प्रारंभ करते हुए, 1 वर्ग, 2 वर्ग, इत्यादि में रंग भरिए, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है।

प्रदर्शन

1. गुलाबी रंग का क्षेत्र सीढ़ियों जैसा लगता है।
2. पहली सीढ़ी की लंबाई 1 इकाई है, दूसरी सीढ़ी की लंबाई 2 इकाई है, तीसरी सीढ़ी की लंबाई 3 इकाई है, और ऐसा ही आगे होता रहता है। 10वीं सीढ़ी की लंबाई 10 इकाई है।

आकृति 1

3. इन लंबाइयों से एक पैटर्न (प्रतिरूप) 1, 2, 3, 4, ..., 10 प्राप्त होता है जो एक AP है। इसका प्रथम पद 1 है तथा सार्व अंतर 1 है।

4. प्रथम दस पदों का योग

$$= 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55 \qquad (1)$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आयत ABCD का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 11$, जो वही है जो ऊपर (1) में प्राप्त हुआ है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि

प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योग $\frac{1}{2} \times 10 \times 11 = \frac{1}{2} \times 10(10+1)$ है।

इसे प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग को ज्ञात करने के लिए

$S_n = \frac{1}{2} n(n+1)$ के रूप में व्यापीकृत किया जा सकता है। (2)

प्रेक्षण

$n = 4$ के लिए, S_n = ... है।

$n = 12$ के लिए, S_n = ... है।

$n = 50$ के लिए, S_n = ... है।

$n = 100$ के लिए, S_n = ... है।

अनुप्रयोग

परिणाम (2) का प्रयोग निम्नलिखित संख्या-सूचियों के प्रथम n पदों के योग को ज्ञात करने में किया जा सकता है–

(i) $1^2, 2^2, 3^2, ...$

(ii) $1^3, 2^3, 3^3, ...,$

जिनका आप कक्षा XI में अध्ययन करेंगे।

क्रियाकलाप 7

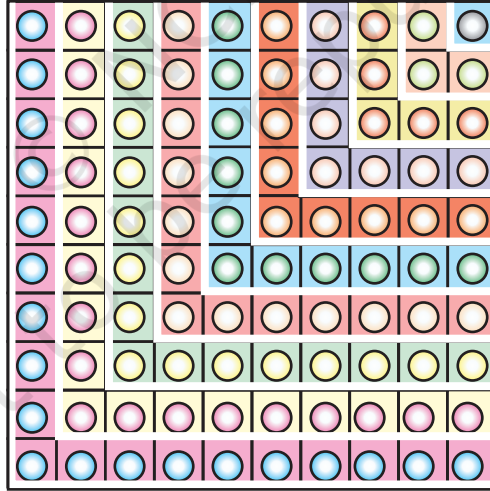
उद्देश्य

प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, थर्मोकोल की गोलियाँ, पिन, पेंसिल, पटरी, गोंद, सफ़ेद काग़ज़।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. इस पर उपयुक्त माप (10cm × 10cm) का एक वर्ग खींचिए।
3. इस वर्ग को इकाई वर्गों में विभाजित कीजिए।
4. प्रत्येक वर्ग में एक पिन की सहायता से थर्मोकोल की एक गोली लगाइए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।
5. इन गोलियों पर आकृति में दर्शाए अनुसार घेरे लगाइए।

आकृति 1

प्रदर्शन

ऊपर से सबसे दाईं ओर के कोने से प्रारंभ करते हुए, पहले घेरे में गोलियों की संख्या (नीला रंग) = 1 $(=1^2)$ है,

प्रथम दो घेरों में, गोलियों की संख्या $= 1 + 3 = 4\ (=2^2)$ है,

प्रथम 3 घेरों में, गोलियों की संख्या $= 1 + 3 + 5 = 9\ (=3^2)$ है,

....

प्रथम 10 घेरों में गोलियों की संख्या $= 1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100\ (=10^2)$ है। इससे प्रथम 10 विषम प्राकृत संख्याओं का योग प्राप्त होता है। इस परिणाम को प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं के योग के लिए,

$$S_n = 1 + 3 + 5 \text{ .... } + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

के रूप में व्यापीकृत किया जा सकता है।

प्रेक्षण

(1) में, $n = 4$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 5$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 50$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 100$ के लिए, S_n = ... है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं के योग के लिए सूत्र निर्धारण में सहायक है।

क्रियाकलाप 8

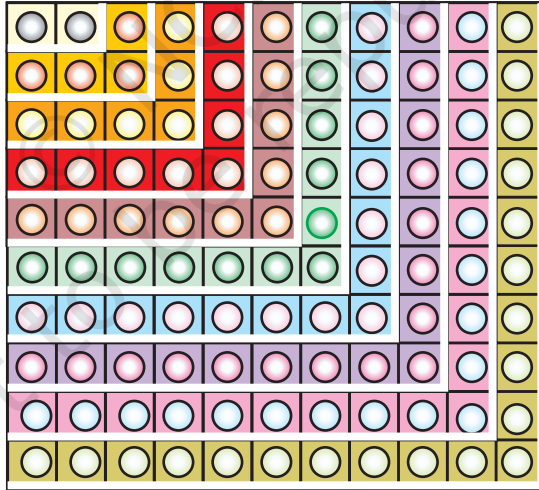
उद्देश्य

प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, थर्मोकोल की गोलियाँ, पिन, पेंसिल, पटरी, सफ़ेद काग़ज़, चार्ट पेपर, गोंद।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. इस पर उपयुक्त माप ($10 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$) का एक आयत खींचिए।
3. इस आयत को इकाई वर्गों में विभाजित कीजिए।
4. प्रत्येक वर्ग में पिन की सहायता से थर्मोकोल की एक गोली लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
5. गोलियों पर आकृति में दर्शाए अनुसार घेरे लगाइए।

आकृति 1

प्रदर्शन

ऊपर से सबसे बाएँ कोने से प्रारंभ करते हुए,

14/04/18

पहले घेरे में गोलियों की संख्या $= 2\ (= 1 \times 2)$ है,

प्रथम दो घेरों में गोलियों की संख्या $= 2 + 4 = 6\ (= 2 \times 3)$ है,

प्रथम तीन घेरों में, गोलियों की संख्या $= 2 + 4 + 6 = 12\ (= 3 \times 4)$ है,

....

प्रथम 6 घेरों में, गोलियों की संख्या $= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42\ (= 6 \times 7)$ है,

....

प्रथम 10 घेरों में, गोलियों की संख्या $= 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 20 = 110\ (=10 \times 11)$ है।

इससे प्रथम 10 सम प्राकृत संख्याओं का योग प्राप्त होता है।

इसको प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं के योग के लिए,

$S_n = 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \times (n + 1)$ (1)

के रूप में व्यापीकृत किया जा सकता है।

प्रेक्षण

(1) में, $n = 4$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 7$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 40$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 70$ के लिए, S_n = ... है।

(1) में, $n = 100$ के लिए, S_n = ... है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं के योग के लिए सूत्र निर्धारण में सहायक है।

क्रियाकलाप 9

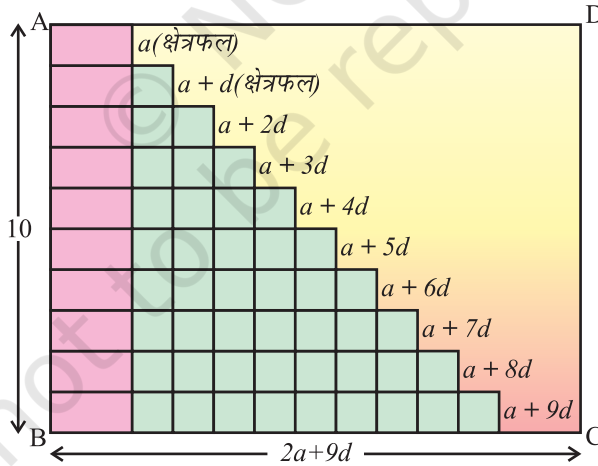
उद्देश्य

किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग के लिए एक सूत्र स्थापित करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, रंगीन ड्राइंगशीट, सफ़ेद काग़ज़, कटर, गोंद, पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक आयताकार कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए। इस पर लंबाई $(2a+9d)$ इकाई और चौड़ाई 10 इकाई का एक आयत ABCD खींचिए।
2. रंगीन ड्राइंग शीटों का प्रयोग करते हुए, कुछ आयताकार पट्टियाँ लंबाई a इकाई और चौड़ाई एक इकाई की बनाइए तथा कुछ आयताकार पट्टियाँ लंबाई d इकाई और चौड़ाई एक इकाई की बनाइए।
3. इन पट्टियों को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार आयत ABCD पर व्यवस्थित कीजिए/चिपकाइए।

आकृति 1

प्रदर्शन

1. इस प्रकार व्यवस्थित की गई पट्टियाँ सीढ़ियों की तरह दिखाई देती हैं।

2. पहली सीढ़ी की लंबाई a इकाई, दूसरी सीढ़ी की लंबाई $a+d$ इकाई, तीसरी की लंबाई $a+2d$ इकाई, इत्यादि है तथा इनमें से प्रत्येक की चौड़ाई 1 इकाई है। अतः, इन सीढ़ियों के क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) क्रमशः $a, a + d, a + 2d, ..., a+9d,$ हैं।
3. पट्टियों की इस व्यवस्था से एक पैटर्न $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ प्राप्त होता है, जो प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली एक AP है।
4. इन पट्टियों के क्षेत्रफलों का योग (वर्ग इकाइयों में)

   $= a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + 9d) = 10a + 45d$ (1)
5. सीढ़ियों से बने डिज़ाइन का क्षेत्रफल = आयत के शेष भाग का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आयत ABCD का क्षेत्रफल) = $\frac{1}{2}(10)(2a+9d)$ = $10a + 45d$,

   यह वही है, जो हमें ऊपर (1) में प्राप्त हुआ है।

   इससे यह प्रदर्शित होता है कि AP के प्रथम 10 पदों का योग

   $= \frac{1}{2}(10)(2a+9d) = \frac{1}{2}(10)\left[2a+(10-1)d\right]$ है।

   इसे और आगे किसी AP के प्रथम n पदों के योग को $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$ के रूप में ज्ञात करने के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ---------, d = -----------, n = --------- S_n = ------------

अतः, $S_n = \frac{n}{2}$ [——— $+(n-1)$ ———]

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग, कक्षा XI में अध्ययन की जाने वाली निम्नलिखित संख्या सूचियों के प्रथम n पदों के योग को ज्ञात करने में किया जा सकता है–

1. $1^2, 2^2, 3^2, ...$
2. $1^3, 2^3, 3^3, ...$

क्रियाकलाप 10

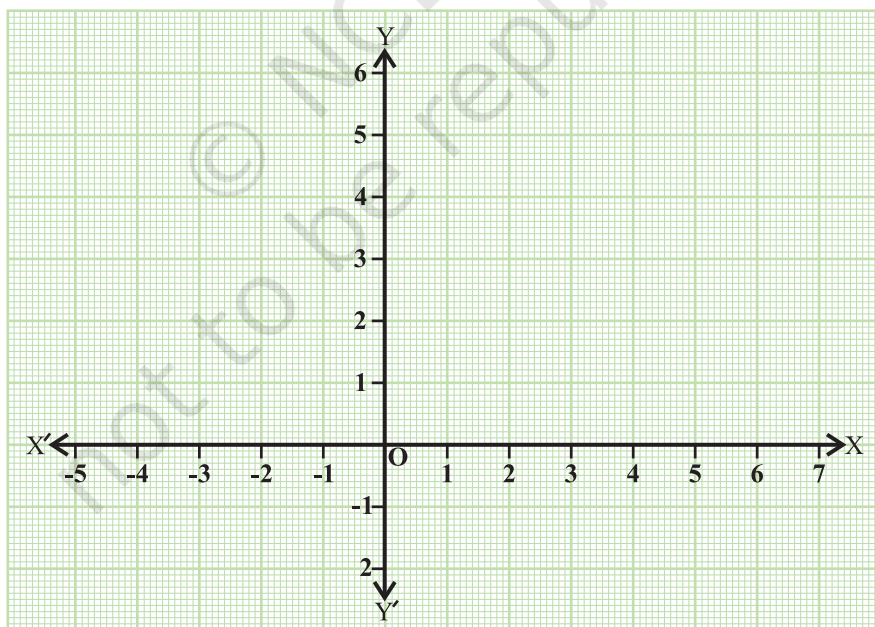
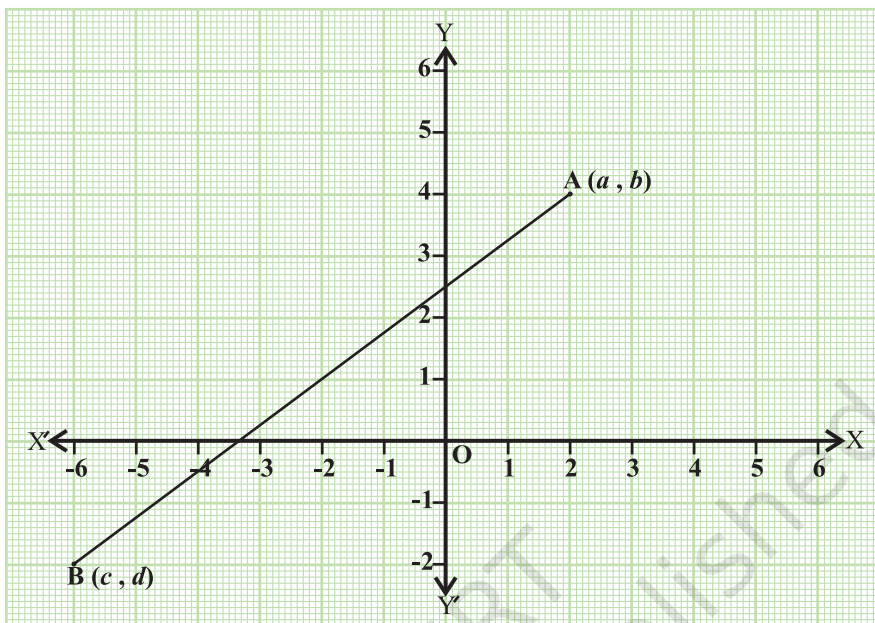
उद्देश्य

आलेखीय विधि से दूरी सूत्र का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, चार्ट पेपर, आलेख काग़ज़, गोंद, पेन/पेंसिल और पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप के एक कार्ड बोर्ड पर एक चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. इस चार्ट पेपर पर एक आलेख काग़ज़ चिपकाइए।
3. आलेख काग़ज़ पर अक्ष X′OX और YOY′ खींचिए (देखिए आकृति 1)।
4. इस आलेख काग़ज़ पर दो बिंदु A(a, b) और B(c, d) लीजिए तथा रेखाखंड AB प्राप्त करने के लिए इन्हें मिलाइए (देखिए आकृति 2)।

आकृति 1

आकृति 2

प्रदर्शन

1. दूरी सूत्र $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ का प्रयोग करते हुए, दूरी AB परिकलित कीजिए।
2. एक पटरी की सहायता से दोनों बिंदुओं A और B की दूरी मापिए।
3. दूरी सूत्र से परिकलित की गई दूरी और पटरी से मापी गई दूरी एक ही हैं।

प्रेक्षण

1. बिंदु A के निर्देशांक ____________ हैं।
   बिंदु B के निर्देशांक ____________ हैं।
2. दूरी सूत्र के प्रयोग से, दूरी AB ____________ है।
3. पटरी से मापी गई वास्तविक दूरी AB ____________ है।
4. चरण 2 में परिकलित दूरी तथा चरण 3 में मापी गई वास्तविक दूरी _________ हैं।

अनुप्रयोग

दूरी सूत्र का प्रयोग ज्यामिति के अनेक परिणामों को सिद्ध करने में किया जाता है।